

УДК 518.61.001.573

О. Фурсачик

Національний університет водного господарства та
природокористування

ЧИСЛОВО-АСИМПТОТИЧНЕ НАБЛИЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ОДНОГО КЛАСУ ОБЕРНЕНИХ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ ЗАДАЧ ТИПУ «КОНВЕКЦІЯ–ДИФУЗІЯ» З УМОВОЮ НАПЕРЕДЗАДАДАННЯ

Резюме. Побудовано алгоритм числово-асимптотичного наближення розв'язків обернених сингулярно збурених крайових задач типу „конвекція–дифузія” на відновлення невідомої, представленої добутком залежних окремо від часу та просторової координати функції джерела за умови напередзадання. На цій основі проведено комп'ютерний експеримент.

Ключові слова: джерело, обернена задача, малий параметр, умова напередзадання, сингулярно збурені задачі, асимптотика)

H. Fursachyk

NUMERAL-ASYMPTOTIC EXPANSION OF DECISION OF ONE CLASS INVERS SINGULAR DISTURBED PROBLEMS OF TYPE CONVECTION-DIFFUSION WITH OVERDETERMINATION CONDITION

The summary. The algorithm is constructed for asymptotic expansion resolving invers singular perturbed boundary-value «convection-diffusion» problems with unknown right part represented by product of two functions one of the time and the other of space coordinate with overdetermination condition. On this basis the computer experiment is carried out.

Key words: source, inverse problem, small parameter, overdetermination condition, singular perturbed problem, asymptotic.

Вступ. Задачі, які полягають у знаходженні невідомих коефіцієнтів, правих частин рівнянь (так званих функцій джерела), що описують той чи інший процес, у відновленні початкових чи граничних умов, задачі на встановлення геометрії області, в якій розглядається процес, утворюють широкий клас обернених задач. Їх вивчення викликано значним практичним інтересом, адже дає можливість ідентифікувати невідомі параметри процесу без складних або довготривалих у часі експериментів.

Традиційним підходом до наближеного розв'язку обернених задач з невідомою правою частиною є зведення задачі за допомогою функції Гріна до інтегрального рівняння Вольтера першого роду [1]. У роботах [2, 3] запропоновано зведення вихідної задачі тепло- або масопереносу до допоміжної крайової задачі для навантаженого рівняння переносу тепла чи домішок. Питанням існування та єдності розв'язків такого класу задач присвячені роботи Гольдмана Н.Л., Іванчова М.І., Черепанової О.Н. та інших (напр. [4, 5]).

Метою даної роботи є асимптотичне розвинення розв'язків одно- та двовимірних сингулярно збурених задач типу „конвекція–дифузія” у випадку ідентифікації невідомої просторової компонентофункції джерела за фінальним спостереженням.

Постановка задачі в малому. Розглянемо наступну модельну обернену сингулярно збурену задачу конвективної дифузії за наявності додаткових джерел забруднень:

$$\varepsilon D u_{xx} - v(x) u_x = u_t(x, t) - p(x) l(t), \quad (x, t) \in (0, 1) \times (0, t_*), \quad (1)$$

$$u(0, t) = u_*(t), \quad u(1, t) = u^*(t), \quad u(x, 0) = u_0^0(x), \quad (2)$$

$$u(x, t_*) = \mu_0(x) + \varepsilon \mu_1(x), \quad (3)$$

де $u(x, t)$ – концентрація розчинної речовини у фільтраційній течії у точці x у момент часу t , εD – коефіцієнт дифузії, ε ($\varepsilon > 0$) – малий параметр, $D > 0$ (для зручності викладок покладемо $D = 1$), $v(x)$ – швидкість фільтрації ($v(x) \geq v_* \gg \varepsilon$), $u_*(t)$, $u^*(t)$, $u_0^0(x)$, u_* , $\mu_0(x)$, $\mu_1(x)$, $l(t)$ – відомі, достатньо гладкі узгоджені між собою функції, $p(x)$ ($p(0) = p(1) = 0$) – функція, яка характеризує інтенсивність джерела забруднення.

Тут $u(x, t)$, $p(x)$ – шукані функції, $x \in (0, 1)$, $t \in (0, t_*)$.

Асимптотичне наближення розв'язку. Розв'язок задачі (1)–(3) на знаходження невідомих $u(x, t)$ та $p(x)$ шукаємо у вигляді асимптотичних рядів [6]

$$u(x, t) = u_0(x, t) + \varepsilon u_1(x, t) + \pi_0(\xi, t) + \pi_1(\xi, t) \varepsilon^1 + \pi_2(\xi, t) \varepsilon^2 + r_2(x, t, \varepsilon), \quad (4)$$

$$p(x) = p_0(x) + \varepsilon p_1(x) + r_{2p}(x, \varepsilon), \quad (5)$$

де r_2 та r_{2p} – залишкові члени, $u_i(x, t)$, $p_i(x)$ ($i = \overline{0, 1}$) – члени регулярних частин асимптотик, зокрема: u_0 – розв'язок відповідної виродженої задачі, u_1 – поправка, що враховує “вклад” дифузії (за винятком деякої примежевої зони), $\pi_i(\xi, t)$, ($i = \overline{0, 2}$) – функції типу примежевого шару, що враховують вплив граничної умови в околі $x = 1$ (поправки на виході фільтраційної течії), $\xi = (1 - x) \cdot \varepsilon^{-1}$ – відповідне регуляризуюче перетворення.

Аналогічно до [6, 7], в результаті підстановки (4) в (1)–(3) та застосування стандартної “процедури прирівнювання”, для знаходження функцій u_i і p_i ($i = \overline{0, 1}$) приходимо до таких задач:

$$\begin{cases} v(x) u_{0x} + u_{0t} = p_0(x) l(t), \\ u_0(0, t) = u_*(t), \quad u_0(x, 0) = u_0^0(x), \\ u_0(x, t_*) = \mu_0(x) \quad ; \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} v(x) u_{1x}(x, t) + u_{1t}(x, t) = u_{0xx}(x, t) + p_1(x) l(t), \\ u_1(0, t) = u_1(x, 0) = 0, \\ u_1(x, t_*) = \mu_1(x) \quad . \end{cases} \quad (7)$$

В результаті розв'язання (6) та (7) відносно u_0 та u_1 маємо

$$u_0(x, t) = \begin{cases} \int_0^t p_0(f^{-1}(f(x) + \tilde{t} - t)) l(\tilde{t}) d\tilde{t} + u_0^0(f^{-1}(f(x) - t)), & t \leq f(x), \\ \int_0^x \frac{1}{v(\tilde{x})} p_0(\tilde{x}) l(f(\tilde{x}) - f(x) + t) d\tilde{x} + u_*(t - f(x)), & t > f(x), \end{cases}$$

$$u_1(x, t) = \begin{cases} \int_0^t (u_{0xx}(f^{-1}(f(x) + \tilde{t} - t), \tilde{t}) + p_1(f^{-1}(f(x) + \tilde{t} - t)l(\tilde{t}))) d\tilde{t}, & t \leq f(x), \\ \int_0^x \left(\frac{1}{v(\tilde{x})} u_{0xx}(\tilde{x}, f(\tilde{x}) - f(x) + t) + p_1(\tilde{x})l(f(\tilde{x}) - f(x) + t) \right) d\tilde{x}, & t > f(x), \end{cases}$$

де $f(x) = \int_0^x \frac{d\tilde{x}}{v(\tilde{x})}$, f^{-1} – функція обернена до f .

Для випадку великих проміжків часу з умови перевизначення (3), отримаємо такі інтегральні рівняння Вольтера першого роду [8] для знаходження невідомих $p_0(x)$ та $p_1(x)$:

$$\begin{aligned} \mu_0(x) = u_0(x, t_*) &= \int_0^x \left(\frac{1}{v(\tilde{x})} p_0(\tilde{x})l(f(\tilde{x}) - f(x) + t_*) \right) d\tilde{x} + u_*(t_* - f(x)), \\ \mu_1(x) = u_1(x, t_*) &= \int_0^x \left(\frac{1}{v(\tilde{x})} u_{0xx}(\tilde{x}, f(\tilde{x}) - f(x) + t_*) + p_1(\tilde{x})l(f(\tilde{x}) - f(x) + t_*) \right) d\tilde{x}. \end{aligned}$$

Наведемо чисельний алгоритм знаходження функції $p_0(x)$ (функція $p_1(x)$ знаходиться аналогічно)

$$\mu_0(x) = u_0(x, t_*) = \int_0^x \frac{1}{v(\tilde{x})} p_0(\tilde{x})l(f(\tilde{x}) - f(x) + t_*) d\tilde{x} + u_*(t_* - f(x)), \quad t_* > f(x), \quad (8)$$

Ввівши рівномірну сітку по x : $x_i = \Delta x i$, $i = \overline{1, n}$, $\Delta x = \frac{1}{n}$, при $x = x_i$ (8) запишемо у вигляді

$$\lambda(x_i) = \int_a^{x_i} \frac{1}{v(\tilde{x})} p_0(\tilde{x})l(f(\tilde{x}) - f(x_i) + t_*) d\tilde{x},$$

де $\lambda(x_i) = \mu_0(x_i) - u_*(t_* - f(x_i))$. На основі заміни інтеграла квадратурною формулою (у нашому випадку формулою трапецій), отримаємо наступний покроковий алгоритм знаходження невідомої $p_0(x)$:

$$\begin{aligned} p_{01} &= \frac{\lambda'_x(0)}{K_{11}}, \quad \lambda'_x(0) = \frac{-3\lambda_1 + 4\lambda_2 - \lambda_3}{2\Delta x}, \\ p_{0i} &= \frac{2}{K_{ii}} \left(\frac{\lambda_i}{\Delta x} - \sum_{j=1}^{i-1} \beta_j K_{ij} p_{0j} \right), \quad \beta_j = \begin{cases} \frac{1}{2} \text{ при } j=1, \\ 1 \text{ при } j>1, \end{cases} \quad i = \overline{2, n}, \end{aligned}$$

де $p_{0i} = p_0(x_i)$, $\lambda_i = \lambda(x_i)$, $K_{ij} = \frac{1}{v(x_j)} l(f(x_j) - f(x_i) + t_*)$.

Умова $p(1)=0$ забезпечує можливість отримати поправки $\pi = \sum_{i=0}^2 \pi_i \varepsilon^i$ у вигляді, аналогічному до [9].

Узагальнимо поставлену вище задачу для випадку чотирикутної криволінійної області (пористого пласта) $G_z = ABCD$ ($z = x + iy$), обмеженої чотирма гладкими ортогональними між собою (у точках перетину) кривими $AB = \{z = x + iy : f_1(x, y) = 0\}$, $BC = \{z : f_2(x, y) = 0\}$, $CD = \{z : f_3(x, y) = 0\}$, $DA = \{z : f_4(x, y) = 0\}$. Двовимірний аналог задачі (1)-(3) запишемо так:

$$\varepsilon D c_{xx} + \varepsilon D c_{yy} - v_x(x, y) c_x - v_y(x, y) c_y = c_t - p(x, y)l(t), \quad (9)$$

$$c(x, y, 0) = c_0^0(x, y), \quad c|_{AB} = c_*(M, t), \quad c|_{CD} = c^*(M, t), \quad c|_{AD} = c_{**}(M, t), \quad c|_{BC} = c^{**}(M, t), \quad (10)$$

$$c(x, y, t_*) = \mu_0(x, y) + \varepsilon \mu_1(x, y), \quad (x, y) \in G_z, \quad (11)$$

$$(v_x, v_y) = \text{grad } \varphi(x, y), \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0, \quad \varphi|_{AB} = \varphi_*, \quad \varphi|_{CD} = \varphi^*,$$

$$\frac{d\varphi}{dn}\Big|_{BC} = \frac{d\varphi}{dn}\Big|_{DA} = 0, \quad Q = \int_{AB} -v_y dx + v_x dy, \quad (12)$$

де $c(x, y, t)$ – концентрація розчинної речовини в точці (x, y) у момент часу t ; M та n – біжуча точка та нормаль до відповідної кривої; φ, v_x, v_y – відповідно потенціал і компоненти його швидкості фільтрації у пористому середовищі G_z ; εD – коефіцієнт дифузії; ε – малий параметр; $c_0^0, c_*, c^*, c^{**}, c_{**}, \mu_0(x, y), \mu_1(x, y), l(t)$ – достатньо гладкі функції, узгоджені між собою на ребрах (зокрема, в кутових точках) області G ; $u(x, y, t), p(x, y)$ ($p|_{AB} = p|_{CD} = p|_{AD} = p|_{BC} = 0$) – шукані функції.

Прийнявши, що задача (12) шляхом конформного відображення $G_z \mapsto G_w$ (або $G_w \mapsto G_z$), де $G_w = \{w = \varphi + i\psi : \varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q\}$ – відповідна G_z область комплексного потенціалу, $\psi = \psi(x, y)$ – функція течії (комплексно спряжена до $\varphi = \varphi(x, y)$), є розв’язаною, зокрема, знайдено поле швидкості $(v_x(x, y), v_y(x, y))$ та, здійснивши заміну змінних $x = x(\varphi, \psi), y = y(\varphi, \psi)$ у рівнянні (9) і умовах (10)–(11), приходимо до відповідної “дифузійної задачі” з додатковими джерелами забруднення для області G_w [9]:

$$\varepsilon D v^2(\varphi, \psi)(u_{\varphi\varphi} + u_{\psi\psi}) - v^2(\varphi, \psi)u_\varphi = u_t - p(\varphi, \psi)l(t) \quad (13)$$

$$u(\varphi, \psi, 0) = u_0^0(\varphi, \psi), \quad u(\varphi_*, \psi, t) = u_*(\psi, t), \quad u(\varphi^*, \psi, t) = u^*(\psi, t),$$

$$u(\varphi, Q_*, t) = u_{**}(\varphi, t), \quad u(\varphi, Q^*, t) = u^{**}(\varphi, t), \quad (14)$$

$$u(\varphi, \psi, t_*) = \gamma_0(\varphi, \psi) + \varepsilon \gamma_1(\varphi, \psi) + \dots + \varepsilon^i \gamma_i(\varphi, \psi) + \dots, \quad (15)$$

де $u(\varphi, \psi, t) = c(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi), t)$, $u_0^0(\varphi, \psi) = c_0^0(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi))$, $\gamma_0(\varphi, \psi) = \mu_0(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi))$ і т.д.

Асимптотичне наближення для розв’язку задачі (13)–(15) з точністю $O(\varepsilon^{m+1})$ шукатимемо у вигляді рядів [6]

$$\begin{aligned} u(\varphi, \psi, t) &= u_0(\varphi, \psi, t) + \sum_{i=1}^m \varepsilon^i u_i(\varphi, \psi, t) + \sum_{i=0}^{m+1} \varepsilon^i \pi_i(\xi, \psi, t) + \\ &+ \sum_{i=0}^{m+1} \varepsilon^{i/2} \underline{p}_{i/2}(\varphi, \eta, t) + \sum_{i=0}^{m+1} \varepsilon^{i/2} \bar{p}_{i/2}(\varphi, \zeta, t) + R_m(\varphi, \psi, t, \varepsilon), \\ p(\varphi, \psi) &= p_0(\varphi, \psi) + \sum_{i=1}^m \varepsilon^i p_i(\varphi, \psi) + r_m(\varphi, \psi, \varepsilon), \end{aligned}$$

де $u_i(\varphi, \psi, t)$, $p_i(\varphi, \psi)$, $i = \overline{1, m}$, – члени регулярної частини асимптотики, зокрема: $u_0(\varphi, \psi, t)$ – розв’язок відповідної виродженої задачі (конвективного переносу); $u_i(\varphi, \psi, t)$ – поправки, які враховують вплив дифузії всюди в області G_w , за винятком деякої її примежевої ділянки; $\pi_i(\xi, \psi, t)$, $\underline{p}_{i/2}(\varphi, \eta, t)$, $\bar{p}_{i/2}(\varphi, \zeta, t)$ – функції типу примежевого шару відповідно в околах $\varphi = \varphi^*$ (поправки навколо виходу фільтраційної течії) і $\psi = Q_*$, $\psi = Q^*$ (поправки, що враховують вплив «бічних джерел забруднень»)

(знаходяться аналогічно до [7], [9]); $\xi = \frac{\varphi^* - \varphi}{\varepsilon}$, $\eta = \frac{\varphi^* - \varphi}{\sqrt{\varepsilon}}$, $\zeta = \frac{Q^* - Q}{\sqrt{\varepsilon}}$ – «розтяги» відповідних змінних; $R_m(\varphi, \psi, t, \varepsilon)$ та $r_m(\varphi, \psi, \varepsilon)$ – залишкові члени.

Для знаходження невідомих $p_i(\varphi, \psi)$, використовуючи умови перевизначення (15), приходимо до інтегральних рівнянь Вольтера першого роду

$$\gamma_0(\varphi, \psi) = u_0(\varphi, \psi, t_*) = \int_0^{\varphi} \frac{1}{v^2(\tilde{\varphi}, \psi)} p_0(\tilde{\varphi}, \psi) l(f(\tilde{\varphi}, \psi) - f(\varphi) + t_*) d\tilde{\varphi} + u_*(t_* - f(\varphi, \psi)),$$

$$\gamma_1(\varphi, \psi) = \int_0^{\varphi} \left(v^{-2}(\tilde{\varphi}, \psi) (u_{0\varphi\varphi}(\tilde{\varphi}, \psi, f(\tilde{\varphi}, \psi) - f(\varphi, \psi) + t_*) + u_{0\psi\psi}(\tilde{\varphi}, \psi, f(\tilde{\varphi}, \psi) - f(\varphi, \psi) + t_*)) + p_1(\tilde{\varphi}, \psi) l(f(\tilde{\varphi}, \psi) - f(\varphi, \psi) + t_*) \right) d\tilde{x}.$$

Враховуючи, що змінна ψ фігурує в даних рівняннях як параметр, то процедура їх числового розв'язання аналогічна до наведеної вище.

Числові експерименти. При проведенні розрахунків (для перевірки адекватності і стійкості запропонованого алгоритму) ми використали методику так званого квазіреального експерименту [2], а саме: на початку знаходимо розв'язок $u = U(x, t) = U_0(x, t) + \varepsilon U_1(x, t)$ прямої задачі (1)–(2) при заданій функції просторового розподілу джерела $p(x) = \sin(\pi x)$, далі, поклавши $\mu(x) = \mu_0(x) + \varepsilon \mu_1(x) = U_0(x, t_*) + \varepsilon U_1(x, t_*)$, отримаємо розв'язок відповідної оберненої задачі (1)–(3) при вхідних даних $u_*(t) = 0$, $u_0^0(x) = 0$, $u^*(t) = 0$, $v = 4$, $l(t) = \frac{2+t}{3+t^2}$, $\varepsilon = 0.001$, $\Delta t = 0.05$, $\Delta x = 0.05$, $t_* = 1$.

Результати розрахунків відповідних просторових складових $p(x)$ функції джерела зображено на рисунках 1-4, а саме, на рисинку 1 зображено графіки точної (1) та відновленої (2) залежностей густини джерела від просторової компоненти x , а на рисунках 2–4 – графіки точних та наближених компонент $p(x)$ розв'язків задачі відповідно при $\delta = 0.001$, $\delta = 0.0025$, $\delta = 0.005$.

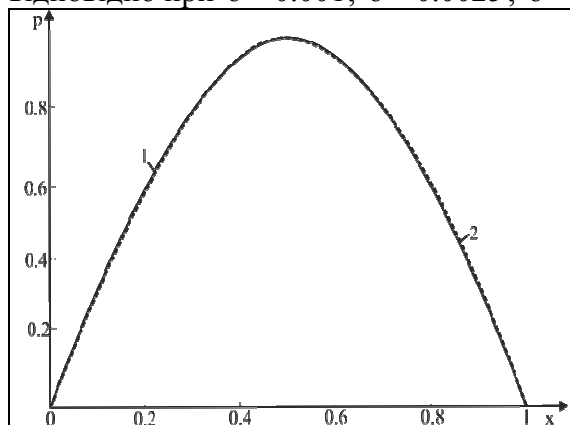


Рисунок 1. Графіки точної та відновленої залежності густини джерела від x

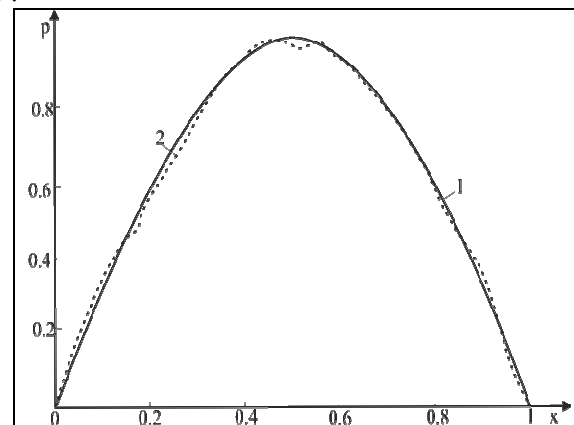


Рисунок 2. Точний та наближений при $\delta = 0.001$ (1 та 2 відповідно)

Як і очікувалося, за відсутності “збурюючого шуму” в умові напередзання, точна та відновлена густина джерела – співпадають. Внесемо “збурюючий шум” в $\mu(x)$ (що відповідає похибкам вимірювання, під час проведення реального експерименту), за наступною формулою: $\mu_\delta(x) = \mu_0(x) + \varepsilon \mu_1(x) + \delta \mu_*(x)$, де зокрема $\mu_*(x)$ – випадкова нормально розподілена на $[0, 1]$ функція, величина δ – задає рівень похибки.

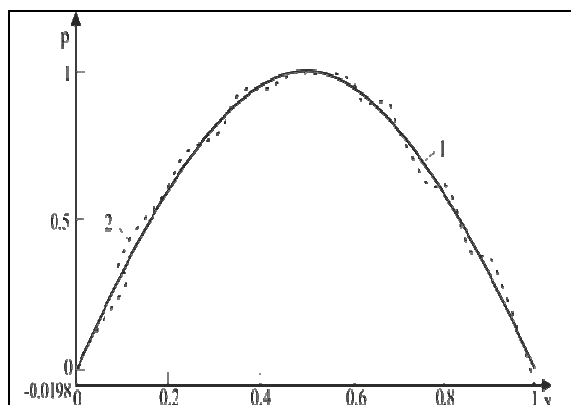


Рисунок 3. Точний та наближений розв'язок при $\delta = 0.0025$ (1 та 2 відповідно)

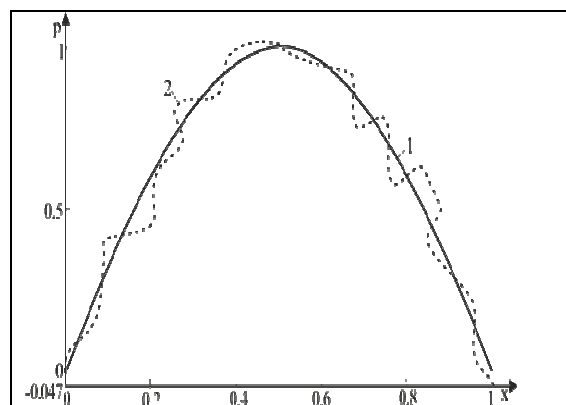


Рисунок 4. Точний та наближений розв'язок при $\delta = 0.005$ (1 та 2 відповідно)

Аналіз результатів, зображених на рис. 2–4 показує, що при зменшенні рівня похибки δ залежність густини джерела від просторової змінної x встановлюється більш точно, що підтверджує стійкість запропонованого алгоритму.

Висновки. Побудовано алгоритм чисельно-асимптотичного розв'язання обернених сингулярно збурених задач на відновлення невідомої просторової компоненти функції джерела. При цьому, на відміну від методики, запропонованої в роботах [2]–[3], точність розрахунків покращується при зменшенні коефіцієнта дифузії. При збільшенні ж коефіцієнта дифузії стійкість запропонованого обчислювального процесу погіршується. У таких випадках доцільніше використовувати методи, запропоновані в [2]–[3]. У перспективі є перенесення даної методики на просторові задачі складної геометрії.

Література

1. Обратная задача восстановления источника для уравнения конвективной диффузии / Ю.А.Криксин, С.Н. Плющев, Е.А. Самарская, В.Ф. Тишкин // Математическое моделирование. – 1995. – Т. 7, № 11. – С. 95–108.
2. Борухов В.Т. Численное решение обратной задачи восстановления источника в параболическом уравнении / В.Т. Борухов, П.Н. Вабищевич // Математическое моделирование. – 1998. – Т. 10, № 11. – С. 93–100.
3. Калинина Е.А. Численное исследование обратной задачи восстановления плотности источника двумерного нестационарного уравнения конвекции-диффузии / Е.А. Калинина // Дальневосточный математический журнал. – 2004. – Т. 5, № 1. – С. 89–99.
4. Гольдман Н.Л. Определение правой части в многомерных параболических уравнениях с финальным наблюдением / Н. Л. Гольдман // Уравнения с частными производными. – 2007. – Т. 43, № 8. – С. 1076–1085.
5. Riganti R. Solution of an inverse problem for the nonlinear heat equation / R. Riganti, E. Savateev // Comm. Part. Diff. Equations – 1994. – № 9, 10. – P. 1611–1628.
6. Васильева А.Б. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений / А.Б.Васильева, В. Ф. Бутузов. – Москва: Наука, 1973. – 273 с.
7. Бомба А.Я. Обернені сингулярно збурені задачі типу «конвекція-дифузія» для двозв'язних областей / А.Я. Бомба, І.М. Присяжнюк, О.А. Фурсачик // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2008. – Вип. 8. – С. 19–25.
8. Васильева А.Б. Интегральные уравнения / А.Б. Васильева, Н.А. Тихонов. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 160 с.
9. Бомба А. Я. Нелінійні сингулярно-збурені задачі типу «конвекція-дифузія» / А. Я. Бомба, С. В. Барановський, І. М. Присяжнюк. – Рівне. – 2008. – 252 с.

Отримано 19.01.2011

